ЕГЭ. Математика. Экономические задачи. Кредиты.

Кредит – это финансовая сделка, в результате которой кредитор (банк или другое финансовое учреждение) представляет на определённый срок деньги заёмщику. За пользование деньгами заёмщик, кроме погашения основного долга (называемого в финансовой литературе *телом кредита*), выплачивает также кредитору проценты. Разделение погашающих платежей на две части, отвечающие за погашение долга (тела кредита) и погашение процентных денег принципиально важно, поскольку от этого зависят уплачиваемые налоги.

Годовой процентной ставкой называется отношение процентных денег к деньгам, данным кредитором заёмщику в долг, при предоставлении кредита сроком на 1 год.

1. Клиент взял в банке кредит 18000 рублей на год под 18 %. Он должен погашать кредит, внося в банк ежемесячно одинаковую сумму денег, с тем чтобы через год выплатить всю сумму, взятую в кредит, вместе с процентами. Сколько рублей он должен вносить в банк ежемесячно?

Решение. Через год банк начислит 18% годовых, то есть долг увеличится в

$\frac{100+18}{100}=1{,}18$ раз. Клиент должен будет банку $18000\cdot 1{,}18$ рублей.

Клиент будет вносить ежемесячно $\frac{18000\cdot 1{,}18}{12}=1770$ рублей.

Ответ: 1770 рублей.

2. Предприниматель обратился в банк с просьбой о предоставлении ссуды в размере 2 700 000 руб. на срок 1 год. Банк выделил ему ссуду с годовой процентной ставкой 20% при условии погашения ссуды одним платежом в конце срока. Какую суму должен через год возвратить предприниматель банку? Какие процентные деньги получит банк?

Решение. Через год банк начислит 20% годовых, то есть долг увеличится в $\frac{100+20}{100}=1{,}2$ раза.

Предприниматель должен вернуть банку $2\,700\,000\cdot 1{,}2=3\,240\,000$ рублей, банк на этом заработает $3\,240\,000-2\,700\,000=540\,000$ рублей.

Ответ: 3 240 000 рублей, 540 000 рублей.

3. Клиент взял в банке 120 000 рублей на год под 12 % годовых. Он должен погашать кредит, внося в банк ежеквартально (1 раз в 3 месяца) одинаковую сумму денег, с тем чтобы через год выплатить всю сумму, взятую в кредит, вместе с процентами. Он выплачивал необходимую сумму три квартала, а для выплаты окончательного взноса ему пришлось взять кредит в другом банке на год под 17% годовых. Он должен погашать второй кредит, внося в банк ежемесячно одинаковую сумму денег, с тем чтобы через год выплатить всю сумму, взятую в кредит, вместе с процентами. Сколько рублей он должен вносить в банк ежемесячно?

Решение.

Клиент будет вносить ежеквартально в первый банк $\frac{120\,000\cdot 1{,}12}{4}=33\,600$ рублей.

Клиент будет вносить ежеквартально во второй банк $\frac{33\,660\cdot 1{,}17}{12}=3\,276$ рублей.

Ответ: 3 276 рублей.

Дифференцированная схема

При *дифференцированной* (или *регрессивной*) схеме ежемесячный платёж включает в себя постоянную сумму для погашения основного долга по кредиту, к которой прибавляются проценты на оставшуюся часть долга. При этом регулярные платежи заёмщика оказываются различными. Методика расчёта платежей в этом случае базируется на использовании арифметической прогрессии. Процентный платёж за пользование потребительским кредитом обычно вычисляется «вперёд»: для первого месяца процентный платёж рассчитывается на всю величину долга, а в каждый следующий месяц– на остаток долга, т.е. величину долга уменьшенную на уже выплаченную часть.

4. Величина предоставленного потребительского кредита – 12 000 рублей. Процентная ставка 12% годовых, срок погашения – 6 месяцев. Схема погашения – регрессивная (то есть в конце каждого месяца заёмщик выплачивает процент на оставшуюся часть долга и одну шестую часть основного долга). Какую сумму выплатить заёмщик в итоге банку?

Решение.
Обозначим s – сумму кредита, т.е.по условию задачи s =12 000 рублей.
Заёмщик должен ежемесячно выплачивать банку следующие суммы:

	Процентный платеж	Месячный взнос	Примечание
1 месяц	$\frac{12}{100}\cdot\frac{6s}{6}$ +	$\frac{s}{6}$	Первый процентный платеж берется со всей суммы основного кредита, а второй уже с учетом заплаченного долга, т.е $s-\frac{s}{6}=\frac{6s}{6}-\frac{s}{6}=\frac{5s}{6}$ и т.д.
2 месяц	$\frac{12}{100}\cdot\frac{5s}{6}$ +	$\frac{s}{6}$	При составлении ежемесячных выплат получившиеся дроби удобнее не сокращать.
3 месяц	$\frac{12}{100}\cdot\frac{4s}{6}$ +	$\frac{s}{6}$	
4 месяц	$\frac{12}{100}\cdot\frac{3s}{6}$ +	$\frac{s}{6}$	
5 месяц	$\frac{12}{100}\cdot\frac{2s}{6}$ +	$\frac{s}{6}$	
6 месяц	$\frac{12}{100}\cdot\frac{s}{6}$ +	$\frac{s}{6}$	

Общая величина выплат равна сумме всех ежемесячных платежей:

$$\frac{12}{100}\cdot\frac{6s}{6}+\frac{12}{100}\cdot\frac{5s}{6}+\frac{12}{100}\cdot\frac{4s}{6}+\frac{12}{100}\cdot\frac{3s}{6}+\frac{12}{100}\cdot\frac{2s}{6}+\frac{12}{100}\cdot\frac{s}{6}+6\cdot\frac{s}{6}=\frac{12}{100}\cdot\frac{s}{6}\cdot(6+5+4+3+2+1)+s=$$

$$=\frac{12}{100}\cdot\frac{s}{6}\cdot 21+s=\frac{21s}{50}+s=\frac{71s}{50}=\frac{71\cdot 120\,00}{50}=17\,040 \text{ рублей.}$$

(Примечание. Вычислим сумму арифметической прогрессии по формуле $S_n=\frac{a_1+a_n}{2}\cdot n$,

т.е. $6+5+4+3+2+1=\frac{6+1}{2}\cdot 6=21$).

Ответ:17 040 рублей.

5. 15 января планируется взять кредит в банке на сумму 1,8 млн рублей на 24 месяца. Условия его возврата таковы:
- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 2% по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.
Какую сумму нужно вернуть банку в течение первого года кредитования?

Решение.
Обозначим s – сумму кредита, т.е.по условию задачи s =1 800 000 рублей.

Кредит берётся на 24 месяца, т.е. месячный взнос составит $\frac{s}{24}$.

Заёмщик должен ежемесячно выплачивать банку следующие суммы:

1 месяц $\frac{2}{100}\cdot\frac{24s}{24}+\frac{s}{24}$

2 месяц $\frac{2}{100}\cdot\frac{23s}{24}+\frac{s}{24}$

3 месяц $\frac{2}{100}\cdot\frac{22s}{24}+\frac{s}{24}$

…

11 месяц $\frac{2}{100}\cdot\frac{14s}{24}+\frac{s}{24}$

12 месяц $\frac{2}{100}\cdot\frac{13s}{24}+\frac{s}{24}$

…

Общая величина выплат в течение первого года (первых 12 месяцев) составит:

$$\frac{2}{100}\cdot\frac{24s}{24}+\frac{2}{100}\cdot\frac{23s}{24}+\ldots+\frac{2}{100}\cdot\frac{14s}{24}+\frac{2}{100}\cdot\frac{13s}{24}+12\cdot\frac{s}{24}=\frac{2}{100}\cdot\frac{s}{24}\cdot(24+23+\ldots+14+13)+\frac{s}{2}=$$
$$=\frac{2}{100}\cdot\frac{s}{24}\cdot\frac{24+13}{2}\cdot12+\frac{s}{2}=\frac{37s}{200}+\frac{s}{2}=\frac{137s}{200}=\frac{137\cdot1\,800\,000}{200}=1\,233\,000\text{рублей}$$

Ответ: 1 233 000 рублей.

6. В июле планируется взять кредит в банке на сумму 16 млн рублей на некоторый срок (целое число лет). Условия его возврата таковы:
- каждый январь долг возрастает на 25 % годовых по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
- в июле каждого года долг должен на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года.
На сколько лет планируется взять кредит, если известно, что общая сумма долга выплат после его полного погашения составит 38 млн рублей?

Решение.
Обозначим s – сумму кредита, т.е.по условию задачи s =16 млн рублей.

Пусть кредит планируется взять на n лет, т.е месячный взнос составит $\frac{s}{n}$ млн рублей .

Заёмщик должен ежегодно выплачивать банку следующие суммы:

1 год $\frac{25}{100}\cdot\frac{ns}{n}+\frac{s}{n}$

2 год $\frac{25}{100}\cdot\frac{(n-1)s}{n}+\frac{s}{n}$

…

n год $\frac{25}{100}\cdot\frac{s}{n}+\frac{s}{n}$

Общая величина выплат составит:

$$\frac{25}{100}\cdot\frac{ns}{n}+\frac{25}{100}\cdot\frac{(n-1)\cdot s}{n}+\ldots+\frac{25}{100}\cdot\frac{s}{n}+n\cdot\frac{s}{n}=\frac{25}{100}\cdot\frac{s}{n}\cdot\left(n+(n-1)+\ldots+1\right)+s=\frac{25}{100}\cdot\frac{s}{n}\cdot\frac{n+1}{2}\cdot n+s=$$

$$=\frac{s\cdot(n+1)}{8}+s=\frac{s\cdot(n+9)}{8}=38$$ млн рублей (по условию задачи).

Решим уравнение:

$$\frac{16\cdot\left(n+9\right)}{8}=38$$

$$n+9=\frac{38\cdot 8}{16}$$

$$n+9=19$$

$$n=10$$

Ответ: 10 лет

7. 15 января планируется взять кредит в банке на 19 месяцев. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на r % по сравнению с концом предыдущего месяца;

- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

- 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Известно, что общая сумма выплат после полного погашения кредита на 30% больше суммы, взятой в кредит. Найдите r.

Решение.

Обозначим s – сумму кредита.

Заёмщик должен ежемесячно выплачивать банку следующие суммы:

1 месяц $\frac{r}{100}\cdot\frac{19s}{19}+\frac{s}{19}$

2 месяц $\frac{r}{100}\cdot\frac{18s}{19}+\frac{s}{19}$

…

18 месяц $\frac{r}{100}\cdot\frac{2s}{19}+\frac{s}{19}$

19 месяц $\frac{r}{100}\cdot\frac{s}{19}+\frac{s}{19}$

Общая сумма выплат:

$$\frac{r}{100}\cdot\frac{19s}{19}+\frac{r}{100}\cdot\frac{18s}{19}+\ldots+\frac{r}{100}\cdot\frac{2s}{19}+\frac{r}{100}\cdot\frac{s}{19}+19\cdot\frac{s}{19}=\frac{r}{100}\cdot\frac{s}{19}\cdot\left(19+18+\ldots+2+1\right)+s=$$

$$=\frac{r}{100}\cdot\frac{s}{19}\cdot\frac{19+1}{2}\cdot19+s=\frac{rs}{10}+s=\frac{rs+10s}{10}=\frac{s(r+10)}{10}.$$

По условию задачи общая сумма выплат на 30% больше суммы, взятой в кредит, т.е.

$$\frac{s\left(r+10\right)}{10}=\frac{130}{100}s$$

$$\frac{s(r+10)}{10}=\frac{13s}{10}$$

$$r+10=13$$

$$r=3$$

Ответ: 3%.

8. В июле планируется взять кредит в банке на сумму 8 млн рублей на некоторый срок (целое число лет). Условия его возврата таковы:
- каждый январь долг возрастает на 20 % годовых по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
- в июле каждого года долг должен на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года.
На какой минимальный срок следует брать кредит, чтобы наибольший годовой платёж по кредиту не превысил 2,4 млн рублей?

Решение.

Пусть кредит планируется взять на n лет, т.е ежегодный взнос составит $\frac{8}{n}$ млн рублей .

Заёмщик должен ежегодно выплачивать банку следующие суммы:

1 год $\quad \frac{20}{100}\cdot8+\frac{8}{n}$

2 год $\quad \frac{20}{100}\cdot\frac{(n-1)\cdot8}{n}+\frac{8}{n}$

…

n год $\quad \frac{20}{100}\cdot\frac{8}{n}+\frac{8}{n}$

Ежегодные суммы выплат образует убывающую арифметическую прогрессию. Следовательно, наибольшим годовым платежом будет сумма выплат за 1 год, т.е.

$$\frac{20}{100}\cdot8+\frac{8}{n}\le2{,}4$$

$$1{,}6+\frac{8}{n}\le2{,}4$$

$$\frac{8}{n}\le0{,}8$$

$$n\ge10$$

Поскольку в условии задачи требуется найти минимальное значение n, то $n=10$.

Ответ: 10 лет.

Аннуитетная схема

На сегодняшний день большим спросом среди заемщиков пользуется аннуитетная схема: заёмщику удобно, когда сумма ежемесячного (ежеквартального или ежегодного) платежа фиксируется на весь срок кредитования.

9. 20 декабря Андрей взял в банке 800 000 рублей в кредит. План выплаты кредита такой: 20 числа каждого следующего месяца банк начисляет 2% на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 2%), затем Андрей переводит в банк платеж. На какое минимальное количество месяцев Андрей может взять кредит, чтобы ежемесячные выплаты были не более 360 000 рублей?

Решение.

Очевидно, что чем больше Андрей будет выплачивать в месяц, тем быстрее он погасит кредит. Поэтому предположим, что первые месяцы Андрей будет выплачивать ровно по 360 000 рублей, а в последний месяц эта сумма может оказаться меньше.

Через месяц после того, как кредит был взят, в результате начисления процентов Андрей окажется должен $1{,}02\cdot 800\,000 = 816\,000$ рублей, а после ежемесячной выплаты эта сумма составит $816\,000 - 360\,000 = 456\,000$ рублей.

Еще через месяц размер долга возрастет до $1{,}02\cdot 456\,000 = 465\,120$ рублей и после очередной выплаты уменьшится до $465\,120 - 360\,000 = 105\,120$ рублей.

Наконец, еще через месяц этот долг возрастет до $1{,}02\cdot 105\,120 = 107\,222{,}4$ рублей и Андрей погасит кредит.

Таким образом, минимальное количество месяцев, на которое Андрей может взять кредит, равно 3

Ответ: 3

10. Клиент взял в банке 15 960 000 рублей в кредит под 30% годовых. По истечении каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 30%), затем клиент переводит в банк определенную сумму ежегодного платежа. Какой должна быть сумма ежегодного платежа, чтобы клиент выплатил долг тремя равными ежегодными платежами?

Решение.

Обозначим s- сумму кредита, по условию задачи s = 15 960 000 рублей.

Пусть искомый платёж составляет x рублей.

Тогда рассчитаем величину долга клиента на конец каждого года:

1 год $1{,}3\cdot s - x$

2 год $1{,}3\cdot(1{,}3\cdot s - x) - x = 1{,}69s - 1{,}3x - x = 1{,}69s - 2{,}3x$

3 год $1{,}3\cdot(1{,}69s - 2{,}3x) - x = 2{,}197s - 2{,}99x - x = 2{,}197s - 3{,}99x$

По условию клиент должен выплатить кредит тремя равными платежами, то есть в конце третьего года его долг должен составить 0 рублей. Составим и решим уравнение:

$2{,}197\cdot 15\,960\,000 - 3{,}99x = 0$

$35\,064\,120 - 3{,}99x = 0$

$3{,}99x = 35\,064\,120$

$x = 8\,788\,000$

Ответ: 8 788 000 рублей.

11. 31 декабря 2014 года Алексей взял в банке 9 282 000 рублей в кредит под 10% годовых. Схема выплат кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 10%), затем Алексей переводит в банк X рублей. Какой должна быть сумма X, чтобы Алексей выплатил долг четырьмя равными платежами (то есть за четыре года)?

Решение.

Обозначим s- сумму кредита, по условию задачи s = 9 282 000 рублей.
Рассчитаем величину долга клиента на конец каждого года:

1 год $1{,}1\cdot s-X$

2 год $1{,}1\cdot(1{,}1\cdot s-X)-X=1{,}21s-1{,}1X-X=1{,}21s-2{,}1X$

3 год $1{,}1\cdot(1{,}21s-2{,}1X)-X=1{,}331s-2{,}31X-X=1{,}331s-3{,}31X$

4 год $1{,}1\cdot(1{,}331s-3{,}31X)-X=1{,}4641s-3{,}641X-X=1{,}4641s-4{,}641X$

По условию Алексей должен выплатить кредит четырьмя равными платежами, то есть в конце четвертого года его долг должен составить 0 рублей. Составим и решим уравнение:

$1{,}4641\cdot 9\,282\,000-4{,}641X=0$

$13\,589\,776{,}2-4{,}641X=0$

$4{,}641X=13\,589\,776{,}2$

$X=2\,928\,200$

Ответ: 2 928 200 рублей.

12. 31 декабря 2014 года Арсений взял в банке 1 млн рублей в кредит. Схема выплат кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на определенное количество процентов), затем Арсений переводит очередной транш. Арсений выплатил кредит за два транша, переведя первый раз 550 тыс. рублей, во второй 638, 4 тыс. рублей. Под какой процент банк выдал кредит Арсению?

Решение.

Пусть кредит был взят под $p\%$ годовых, тогда обозначим $k=1+\dfrac{p}{100}$ (во столько раз увеличивается долг ежегодно).
Рассчитаем величину долга клиента на конец каждого года:

1 год $k\cdot 1000-550$

2 год $k\cdot(1000k-550)-638{,}4=1000k^2-550k-638{,}4$

По условию Арсений выплатил кредит за два транша, то есть в конце второго года его долг должен составить 0 рублей. Составим и решим уравнение:

$1000k^2-550k-638{,}4=0$

$D=(-550)^2-4\cdot 1000\cdot(-638{,}4)=302\,500+2\,553\,600=2\,856\,100$

$\sqrt{D}=1\,690$

$k_1=\dfrac{550+1\,690}{2\,000}=1{,}12$

$k_2=\dfrac{550-1\,690}{2000}<0$ *не удовл. условию задачи*

$1+\dfrac{p}{100}=1{,}12$

$\dfrac{p}{100}=\dfrac{12}{100}$

$p=12$

Ответ: 12%.